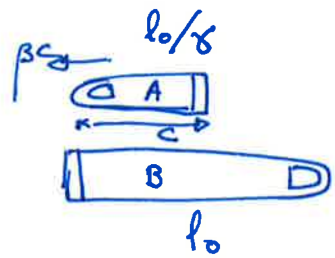
6- Paradojas en Relatividad Especial

6.1

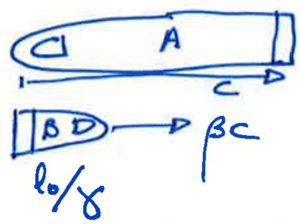
(a)



Visto desde B, la nave A mide $\frac{l_0}{\gamma}$ y viaja a βc. La luz tarda en ir de la cabina al misil:

$$c = \frac{l_0/\gamma}{t_B} \longrightarrow t_B = \frac{l_0}{\gamma c}$$

(b)



Visto desde A, la nave B mide $\frac{l_0}{\gamma}$ y viaja a βc. La luz tarda en ir de la cabina de A al misil

$$c = \frac{l_0}{t_A} \longrightarrow t_A = \frac{l_0}{c}$$

(c) En el tiempo $\frac{l_0}{c}$ la nave B recorre una distancia de:

$$\Delta x = \beta c\, t_A = \beta c \frac{l_0}{c} = \beta l_0$$

(d) La cabina de B parte de $x_0 = \frac{l_0}{\gamma}$, al final se encuentra en

$$x_{Final} = x_0 + \beta l_0 = \frac{l_0}{\gamma} + \beta l_0 = l_0\left(\frac{1}{\gamma} + \beta\right) = l_0\left(\sqrt{1-\beta^2} + \beta\right)$$

$$\frac{x_{Final}}{l_0} = \sqrt{1-\beta^2} + \beta \longrightarrow$$ si esto es mayor que $1 \rightarrow$

la cabina estará a tiro del misil. Si es menor que 1 ($x_{Final} < l_0$) no estará a tiro del misil.

Supongamos que es 1:

$$1 = \sqrt{1-\beta^2} + \beta$$

$$(1-\beta) = \sqrt{1-\beta^2}$$, elevamos al cuadrado:

$$(1-\beta)^2 = 1-\beta^2$$

$$1+\beta^2-2\beta = 1-\beta^2$$

$$2\beta^2-2\beta=0 \longrightarrow 2\beta(\beta-1)=0$$

solo ocurre para $\left\{\begin{array}{l}\beta=0 \\ \text{ó} \\ \beta=1\end{array}\right.$

Supongamos que es mayor que 1:

$$1<\sqrt{1-\beta^2}+\beta \longrightarrow (1-\beta)^2 < 1-\beta^2$$

$$1+\beta^2-2\beta < 1-\beta^2$$

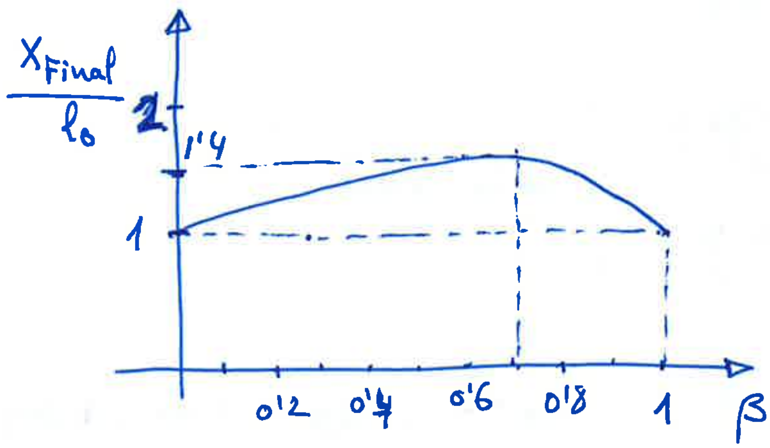
$$2\beta^2 < 2\beta$$

$$\underline{\underline{\beta<1}}$$

Será mayor que 1 (impacto) para velocidades $\beta<1$!!

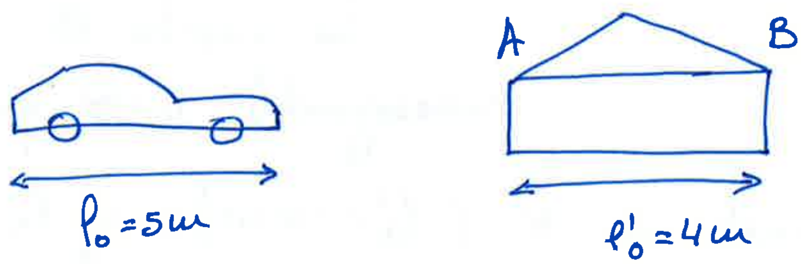
Siempre impactará

Representemos $\frac{x_{Final}}{l_0}$ en función de β:



Siempre es mayor que 1. Siempre habrá impacto.

$\boxed{6.2}$



(a) El coche viaja a $\beta = 0'6$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0'6^2}} = 1'25 \rightarrow l = \frac{l_0}{\gamma} = \underline{\underline{4m}}$$

visto por Q.

(b) Según se ha planteado el problema, ambas puertas, A y B, se cerrarán simultáneamente.

(c) El garaje se mueve a $\beta = 0'6$

$$l' = \frac{l'_0}{\gamma} = \frac{4m}{1'25} = \underline{\underline{3'2\,m}}$$

visto por Bond

(d) Las puertas se cierran a la vez ($t_A = t_B = 0$) según Q. Según Bond:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_A' = \gamma \left(t_A + \frac{v x_A}{c^2} \right) \\ t_B' = \gamma \left(t_B + \frac{v x_B}{c^2} \right) \end{array} \right\} \text{ según Bond}$$

con $t_A = t_B = 0$; $x_A = 0$, $x_B = 4m$, según Q.

$$t_A' = 1'25 \, (0 + 0) = 0$$

$$t_B' = 1'25 \left(0 + \frac{-0'6 \cdot 4}{c} \right) = -10^{-8} s = \underline{\underline{-10 \text{ ns}}}$$

La puerta B cae 10 nanosegundos antes que la A.

Entre la caída de B ($t_B' = -10$ ns) y la de A ($t_A' = 0$ ns) el coche recorre (el garaje recorre):

$$\Delta x = v \cdot \Delta t' = 0'6 \cdot c \cdot 10^{-8} = \underline{\underline{1'8 m}}$$

Si el garaje mide 3'2 m visto por Bond y recorre 1'8 m entre caídas de las puertas:

$$3'2 + 1'8 = \underline{\underline{5 m}} \Rightarrow$$ No impactan al coche, Bond sale ileso (otra vez).

$\boxed{6.3}$ $u = -0'35$, velocidad cometa desde Tierra.

$u' = -0'85$, velocidad cometa desde cohete.

v , velocidad cohete desde Tierra.

Usamos la ley de adición de velocidades:

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}} \Rightarrow -0'35c = \frac{-0'85c + v}{1 - \frac{0'85c\,v}{c^2}}$$

$$-0'35 = \frac{-0'85 + \beta}{1 - 0'85\beta}$$

$$-0'35\left(1 - 0'85\beta\right) = \beta - 0'85$$

$$0'7\beta = 0'5$$

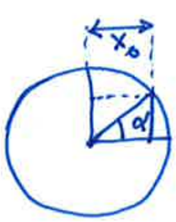
$\boxed{\beta = 0'71}$ velocidad del cohete visto desde Tierra.

$\boxed{6.4}$ Por la contracción de longitud en la dirección del movimiento:

$d = \frac{d_0}{\gamma}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0'6^2}} = 1'25$$

$$d = \frac{10\text{ cm}}{1'25} = \boxed{8\text{ cm}}$$

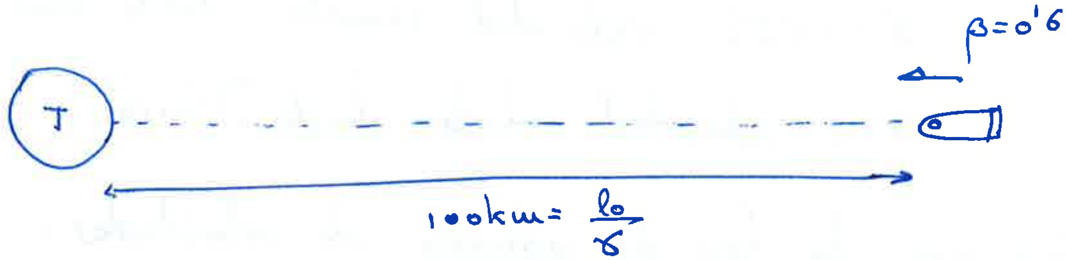


$x_0 = R_0 \cdot \cos\theta$

$x = \frac{x_0}{\gamma}$

Elipse.

$\boxed{6.5}$



(a)

Visto por el astronauta $d = 100km \rightarrow c = \frac{d}{t}$

[Mejor situémonos en el sistema de referencia del astronauta]

$$t = \frac{d}{c} = \frac{100km}{3\cdot10^8\frac{m}{s}} = \frac{10^5 m}{3\cdot10^8\frac{m}{s}} = 3'3\cdot10^{-4}s = 0'33\,ms$$

(b) Tras 0'33 milisegundos la Tierra avanza hacia la nave

$$v = \frac{x_1}{t_1} \rightarrow x_1 = v\,t_1 = (0'6\cdot3\cdot10^8)\cdot(3'3\cdot10^{-4}) = 59400\,m = 59'4\,km$$

Entonces llega la señal a Tierra y sale otra señal de Tierra a la nave. Pero mientras la Tierra sigue acercándose a la nave:

$$c = \frac{x_2}{t_2} \rightarrow t_2 = \frac{x_2}{c} = \frac{(100-59'4)km}{3\cdot10^8\frac{m}{s}} = \frac{40600}{3\cdot10^8} = 1.35\cdot10^{-4}s$$

tiempo de vuelo de la señal de Tierra a nave
x_2 es la distancia que recorre esta luz vista por la nave.

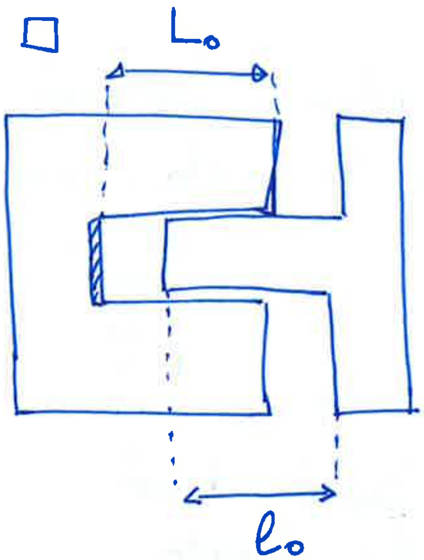
Tiempo desde que el viajero emite hasta que recibe $= t_1 + t_2$

$$\Rightarrow T = 3'3\cdot10^{-4} + 1'35\cdot10^{-4} = \boxed{4'68\cdot10^{-4}s}$$

(c) Según ~~el astronauta~~ la Tierra el astronauta emitió la señal a

$$100km\cdot\gamma = \boxed{125km}$$

$\boxed{6.6}$



(a) Longitud de la llave vista desde la cerradura

$$\ell = \frac{\ell_0}{\gamma} \quad \text{con} \quad \ell < L$$

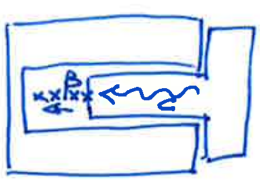
pero casi iguales.

$L_0 > \ell_0$
$\rightarrow$ ligeramenta mayor.

(b) Suceso 1 ocurre en $x_1 = L$, $t_1 = 0$.

Suceso 2 : la punta de la llave sigue viajando hasta que la señal de frenado llega desde el suceso 1 (a $v = c$).

Punta de llave $x_{12} = \frac{\ell_0}{\gamma}$ visto desde la cerradura, viajando a $v = \beta c$. La luz viaja a c



$$\begin{cases} x_{punta} = x_{12} + v \cdot t_2 \\ x_{luz} = 0 + c t_2 \end{cases}$$

Si suponemos que $x_{punta} = x_{luz} \rightarrow$

$$x_{12} + v t_2 = c t_2$$
$$\frac{\ell_0}{\gamma} + v t_2 = c t_2$$
$$t_2 (c - v) = \frac{\ell_0}{\gamma}$$
$$t_2 = \frac{\ell_0}{(c - v)\gamma}$$

$$t_2 = \frac{l_0\sqrt{1-\beta^2}}{c(1-\beta)} = \frac{l_0}{c}\frac{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}}{1-\beta} = \frac{l_0}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Al hacer $x_{punt} = x_{luz}$ estamos buscando donde/cuando la luz alcanzará la punta. Como

$$t_2 = \frac{l_0}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow ct_2 = l_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > l_0$$

Posición donde luz alcanza la punta es más grande que l_0.

Si $L_0 \simeq l_0$ entonces llegará la luz después que la punta y se abrirá.