3-Medición de longitudes y tiempos

$\boxed{3.1}$ $v = 40000 \frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600\,s} \times \frac{10^3 m}{1km} = 1'1 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$

Primero hemos de pasar la velocidad al sistema internacional, $\frac{m}{s}$.

(a) $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{11\cdot 10^3}{3\cdot 10^8}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-1.3\cdot 10^{-9}}} = \boxed{1'000000001}$$

$v = 11\cdot 10^3 \frac{m}{s} = 3'67\cdot 10^{-5} c$

(b) El porcentaje de contracción: $\frac{l_0 - l}{l_0}$ → longitud contraída.

longitud en reposo

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = 0'999999999 \Rightarrow \% = 100\cdot 6'5\cdot 10^{-10} \rightarrow \boxed{6'5\cdot 10^{-8}\,\%}$$

$\frac{l_0 - l}{l_0}$

(c) Tiempo = 3 días + 4 horas + 45 minutos = 276300 segundos de viaje.

$$T_{nave} = \frac{T_{Tierra}}{\gamma} = 276299'9997 \text{ segundos.}$$

$$\Delta T = 0'0002763\, s = \boxed{276\,\mu s}$$

→ microsegundos.

3.2

$$v_{M3} = 3 \cdot 330 = 990 \, \frac{m}{s}$$

$$\beta = \frac{v_{M3}}{c} = \frac{990}{3 \cdot 10^8} = 3'3 \cdot 10^{-6} \longrightarrow$$ 10 veces menor que el Apollo XI $\Rightarrow$ despreciable

---

3.3

$x' = 50 \, m$

$t' = 10^{-7} s$

$$\vec{v}_{S'} = \frac{4}{5} c \vec{i} \longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0'8^2}} = 1'67$$

Usando las ecuaciones de transformación de Lorentz:

$$x = \gamma(x' + vt') = 1'67 \left(50 + \frac{4}{5} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-7}\right) = \boxed{123 \, m}$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) = 1'67 \left(10^{-7} + 50 \cdot \frac{0'8}{3 \cdot 10^8}\right) = \boxed{3'9 \cdot 10^{-7} s}$$

Puesto que para $x=0, t=0$ tenemos que $x'=0, t'=0$, esto significa que ambos orígenes coincidieron cuando $t=t'=0$. El suceso ocurre al cabo de $10^{-7} s$ en el sistema S' y al cabo de $3'9 \cdot 10^{-7} s$ en el sistema S (el mismo suceso).

3.4

$\Delta x(ab) = 100 \, m$

$\Delta x'(ab) = 150 \, m$

$\longrightarrow$ simultáneos en S $(t_a = t_b)$.

Con el invariante espacio-tiempo:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = -100^2$$

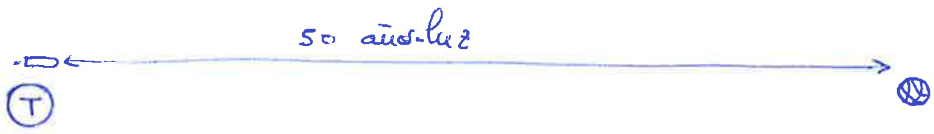
$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2 \Delta t'^2 - 150^2$$

Como $\Delta s^2 = \Delta s'^2 \Rightarrow -100^2 = -150^2 + c^2 \Delta t'^2$

$$\Delta t' = \sqrt{\frac{-100^2 + 150^2}{(3 \cdot 10^8)^2}} = \boxed{3'7 \cdot 10^{-7} s}$$

No son simultáneos desde S'.

$\boxed{3.5}$



Visto desde Tierra

$t = 75$ años

(a) $\text{velocidad} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \dfrac{50 \text{ años-luz}}{75 \text{ años}} = \boxed{0'67 \cdot c} = \frac{2}{3} c$

año luz dividido entre año es velocidad de la luz $\left(\frac{50}{75} = 0'67\right)$

(b) Visto desde la nave alienígena; aplicando dilatación temporal:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = 1'34 \Rightarrow \tau = \frac{t}{\gamma} = \frac{75 \text{ años}}{1'34} = \boxed{56 \text{ años}}$$

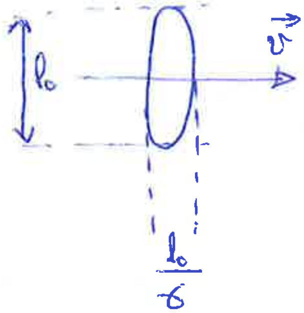
(c) Por contracción de longitudes:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = \frac{50 \text{ años-luz}}{1'34} = \boxed{37'3 \text{ años-luz}}$$

$\boxed{3.6}$

SuperLópez

Debido a la contracción de longitud en la dirección del movimiento, la pelota se contraerá en una dirección, x, pero no en las otras, y, z.



$$\left.\begin{array}{l}\beta = 0'6 \\ l_0 = 0'1\,\text{m}\end{array}\right\} \longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0'6^2}} = 1'25$$

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = \frac{0'1}{1'25} = 0'08\,\text{m}$$

$$\boxed{8\text{ cm}}$$

$\boxed{3.7}$

Partiendo de :
$$x' = \gamma(x - vt) \quad (1)$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad (2)$$

$$\rightarrow \frac{x'}{\gamma} + vt = x \quad \text{sustituido en (2)}: \; t' = \gamma t - \gamma\frac{v}{c^2}\left(\frac{x'}{\gamma} + vt\right) =$$
$$= \gamma t - \frac{v}{c^2}x' - \gamma\beta^2 t$$

$$\Rightarrow t' + \frac{v}{c^2}x' = \gamma t - \gamma\beta^2 t = \gamma t\,(1-\beta^2) = \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,t = \frac{t}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)}$$

Este resultado en (1): $x' = \gamma x - \gamma v\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$

$$\gamma x = x' + \gamma v \gamma \frac{v}{c^2}x' + \gamma^2 v t' = x'\left(1 + \gamma^2\frac{v^2 x'}{c^2}\right) + \gamma^2 v t'$$

$$x = x'\underbrace{\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\frac{v^2}{c^2}\right)}_{\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1-\beta^2+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma} + \gamma v t' = \gamma x' + \gamma v t' \Rightarrow \boxed{x = \gamma(x' + vt')}$$

$\boxed{3.8}$ $x_1 = x_0$, $t_1 = \frac{x_0}{c}$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ | Dos sucesos, 1 y 2, en S
$x_2 = \frac{3}{2}x_0$ $t_2 = \frac{2x_0}{3c}$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$

Hemos de buscar la velocidad de S' respecto a S. Siendo 1 y 2 sucesos simultáneos en S'. Busquemos el invariante espacio-tiempo

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \frac{(3\cdot 10^8)^2}{c^2}\left[\frac{2}{3}\frac{x_0}{c} - \frac{x_0}{c}\right]^2 - \left[\frac{3}{2}x_0 - x_0\right]^2 - 0 - 0 =$$

$$= c^2\frac{x_0^2}{c^2}\left(\frac{2}{3}-1\right)^2 - x_0^2\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 = x_0^2\frac{1}{9} - x_0^2\frac{1}{4} = \frac{-5}{36}x_0^2$$

↓

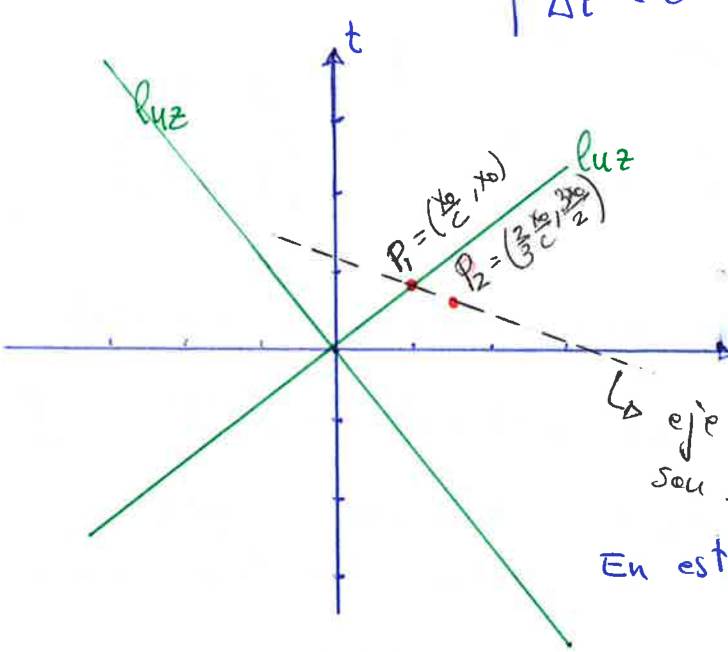
tipo espacio.

Si puede haber un S' donde sean simultáneos.

Como habitualmente, tomamos $t = t' = 0$, $x = x' = 0$ en el origen.

$$\Delta s^2 = \text{constante} \Rightarrow \Delta s'^2 = -\frac{5}{36}x_0^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = -\Delta x'^2$$

$$\begin{cases} \Delta x' = \frac{\sqrt{5}}{6}x_0 \longrightarrow \text{Separación espacial en } S' \\ \Delta t' = 0 \end{cases}$$



La velocidad relativa entre S y S' viene dada por $\frac{\Delta x}{c\Delta t}$ o por $\frac{c\Delta t}{\Delta x}$ dependiendo de si el intervalo es tipo espacio o tipo tiempo. Recordar que $v < c$.

↳ eje x' donde ambos sucesos son simultáneos.

En este caso $\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{x_0\frac{1}{3}}{x_0\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

$$\boxed{\beta = \frac{2}{3}}$$

Para encontrar el instante de tiempo en el sistema S', en que ambos sucesos son simultáneos, tenemos $t_1' = t_2'$. Podemos usar las ecuaciones de Lorentz para x_1, t_1 o para x_2, t_2:

$$t_1' = \gamma\left(t_1 + \beta\frac{x_1}{c}\right) = \gamma\left(\frac{x_0}{c} + \frac{2}{3}\frac{x_0}{c}\right) = \gamma\frac{x_0}{c}\left(1+\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{5}{3}\gamma\frac{x_0}{c}}$$

$$t_2' = \gamma\left(t_2 + \beta\frac{x_2}{c}\right) = \gamma\left(\frac{2}{3}\frac{x_0}{c} + \frac{2}{3}\frac{3}{2}\frac{x_0}{c}\right) = \gamma\frac{x_0}{c}\left(\frac{2}{3}+1\right) = \boxed{\frac{5}{3}\gamma\frac{x_0}{c}}$$

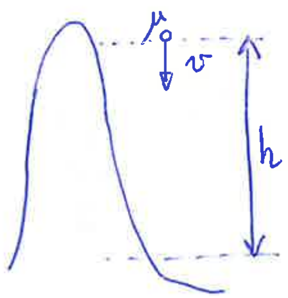
Para la posición:

$$x_1' = \gamma(x_1 + vt_1) = \gamma\left(x_0 + \frac{2}{3}c\frac{x_0}{c}\right) = \boxed{\gamma x_0\frac{5}{3}}$$

$$x_2' = \gamma(x_2 + vt_2) = \gamma\left(\frac{3}{2}x_0 + \frac{2c}{3}\frac{2}{3}\frac{x_0}{c}\right) = \gamma x_0\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{9}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{35}{18}\gamma x_0}$$

$\boxed{3.9}$



$\tau = 2'2\cdot10^{-6}\,s$

$v = 0'95c$

(a) Dilatación temporal: $t = \gamma\tau$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0'95^2}} = 3'2$$

$$t = 3'2\cdot2'2\cdot10^{-6} = \boxed{7\cdot10^{-6}\,s}$$

(b) Los muones, vistos desde el laboratorio, viven $7\,\mu s$, viajando a $\beta = 0'95$.

Recorrerán: $v = \frac{h}{t} \longrightarrow h = vt = (0'95\cdot3\cdot10^8)\cdot(7\cdot10^{-6}) = \boxed{1995\,m}$

(c) Según los muones ellos viven $2'2\,\mu s$, la montaña viaja a $0'95c$ y ellos recorren $h' = v\cdot\tau = 0'95\cdot3\cdot10^8\cdot2'2\cdot10^{-6} = \underline{627\,m}$. Pero llegan al mismo sitio, ya que

$\gamma\cdot h' = 3'2\cdot627 = \underline{2000\,m} = h$. La montaña sube contraída.