EJERCICIOS-RELATIVIDAD ESPECIAL

1- La física de finales del siglo XIX.

$\boxed{\textbf{1.1.}}$ Un observador en S sigue el movimiento de un cuerpo que se desplaza por el espacio según:

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 2t)\vec{i} + (8t^2)\vec{j} - \vec{k}$$

Para otro observador en S' dicho cuerpo se mueve según:

$$\vec{r'}(t) = (t^2 + 3t)\vec{i} + (8t^2)\vec{j} - \vec{k}$$

a) Determinar la velocidad (constante) del sistema S' respecto al sistema S.

La transformación de Galileo: $\vec{r} = \vec{r'} + \vec{u}t \rightarrow \vec{r} - \vec{r'} = \vec{u}t$, que en nuestro caso:

$$\vec{r} - \vec{r'} = (t^2 - 2t)\vec{i} + (8t^2)\vec{j} - \vec{k} - [(t^2 + 3t)\vec{i} + (8t^2)\vec{j} - \vec{k}] = -5t\vec{i} = \vec{u}t$$
$$\boxed{\vec{u} = -5\frac{m}{s}\vec{i}}$$

b) Comprobar que la aceleración es la misma vista desde ambos sistemas.

Para determinar la aceleración vista desde cada uno de los sitemas de referencia sólo tenemos que derivar las expresiones de la posición:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (2\vec{i} + 16\vec{j})\frac{m}{s^2}$$
$$\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} = (2\vec{i} + 16\vec{j})\frac{m}{s^2}$$
$$\rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a'}}$$

$\boxed{\textbf{1.2.}}$ James Bond persigue, a $100\frac{km}{h}$, al malvado Goldfinger, que circula a $90\frac{km}{h}$ por la carretera de un exótico pais.

a) ¿Cuál es la velocidad de Goldfinger vista por Bond?
b) ¿Cuál es la velocidad de Bond vista por Goldfinger?

a) La velocidad de un cuerpo vista por un observador en movimiento respecto a nosotros:

$$\vec{v}_{BG} = \vec{v}_G - \vec{v}_B = 100 - 90 = \boxed{10\frac{km}{h}}$$

Bond ve alejarse hacía delante a Goldfinger a $10\frac{km}{h}$
b) En este caso Goldfinger verá alejarse a Bond hacía atrás según

$$\vec{v}_{GB} = \vec{v}_B - \vec{v}_G = 90 - 100 = \boxed{-10\frac{km}{h}}$$

$\boxed{\textbf{1.3.}}$ Albert acelera su *MGB* según $(2\vec{i} - 3\vec{j})\frac{m}{s^2}$, mientras que Isaac acelera su *Austin Healey 100* según $(2\vec{i} + 2\vec{j})\frac{m}{s^2}$. Si ambos parten del reposo en el origen de nuestro sistema de referencia.

a) ¿Cuál será la velocidad de Albert vista desde el Morgan de Isaac en $t = 5s$?
b) ¿Cuál es la distancia que les separa en ese instante?
c) ¿Cuál es la aceleración de Albert respecto a Isaac?

a) Puesto que las velocidades son pequeñas aplicaremos la relatividad de Galileo, según la cual:

$$\vec{X}(Isaac - Albert) = \vec{X}(Albert) + \vec{V}(Isaac - Albert)\Delta t$$

$$\vec{V}(Isaac - Albert) = \vec{V}(Albert) - \vec{V}(Isaac) = \vec{a}(Albert)\Delta t - \vec{a}(Isaac)\Delta t = (\vec{a}(Albert) - \vec{a}(Isaac))\Delta t$$

$$\vec{V}(Isaac - Albert) = (\vec{a}(Albert) - \vec{a}(Isaac))\Delta t = (2\vec{i} - 3\vec{j} - (2\vec{i} + 2\vec{j})) \cdot 5 = \boxed{-25\vec{j}\,\frac{m}{s^2}}$$

b) En el apartado anterior hemos calculado la velocidad que tiene Albert desde el sistema de referencia de Isaac. Puesto que ambos parten del mismo punto en reposo, la distancia que separa a Albert de Isaac es la que mide Isaac. Él observa que Albert tiene una velocidad de $-25\vec{j}\frac{m}{s}$ en el instante $t = 5s$ y una aceleración $\vec{a} = \vec{a_A} - \vec{a_I}$:

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

$$\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{a_A} - \vec{a_I})\,t^2 = \frac{1}{2}(0\vec{i} - 5\vec{j})\,5^2 = \boxed{62'5m}$$

c) La aceleración de Albert respecto a Isaac (vista por Isaac)

$$\vec{a}_{I_A} = \vec{a}_A - \vec{a}_I = (2\vec{i} - 3\vec{j} - (2\vec{i} + 2\vec{j})) = \boxed{-5\vec{j}\,\frac{m}{s^2}}$$

1.4. Se lanza una pelota desde una altura de $10m$ hacía delante con una velocidad de $+25\frac{m}{s}\vec{i}$ según un observador A en reposo respecto al suelo.

a) Escribir la ecuación de la trayectoria para dicho observador A.

$$x = 25t$$
$$y = 10 - 4'9t^2$$

b) Otro observador B se mueve con velocidad $v_B = +25\frac{m}{s}\vec{i}$. Escribir la ecuación de la trayectoria que registra B.

$$x' = 0$$
$$y' = 10 - 4'9t^2$$

c) Otro observador C se mueve con velocidad $v_C = +50\frac{m}{s}\vec{i}$. Escribir la ecuación de la trayectoria que registra C.

$$x'' = -25t$$
$$y'' = 10 - 4'9t^2$$

1.5. Una estrella binaria es un sistema formado por dos estrellas girando entorno a su centro de masas común. Si suponemos que una de ellas es mucho mayor que la otra podemos aproximar el sistema a una estrella pequeña que gira entorno a otra mucho mayor. Según la física clásica, la luz que viene de la estrella que gira estará emitida a $c-v$ cuando la estrella se aleja de nosotros y a $c+v$ cuando la estrella se acerca a nosotros (suponemos que nos encontramos en el mismo plano que la órbita de la estella). Según esto, puesto que la luz emitida viaja a diferentes velocidades, puede darse el caso de que recibamos a la vez la luz emitida en diferentes puntos de su órbita (veríamos simultáneamente la estrella pequeña en dos puntos diferentes), es decir, la luz rápida daría caza a la luz lenta. Determinar a qué distancia del sistema binario debemos estar para observar esto (expresar el resultado en función del radio de la órbita de la estrella). Suponer que la estrella pequeña gira a $45\frac{km}{h}$ a una distancia de $30 \times 10^6 km$ de su hermana grande.

En la posición "1" (ver figura 1) la velocidad de la luz emitida hacía el observador es (siendo $v = 45\frac{km}{h}$ la velocidad con que gira la estrella)

$$c_1 = c - v = c - 45\frac{km}{h}$$

y la distancia recorrida por la luz "1"

$$d = c_1 t = (c - v)t$$

En la posición "3" la velocidad de la luz emitida hacía el observador es (siendo $v = 45\frac{km}{h}$ la velocidad con que gira la estrella)

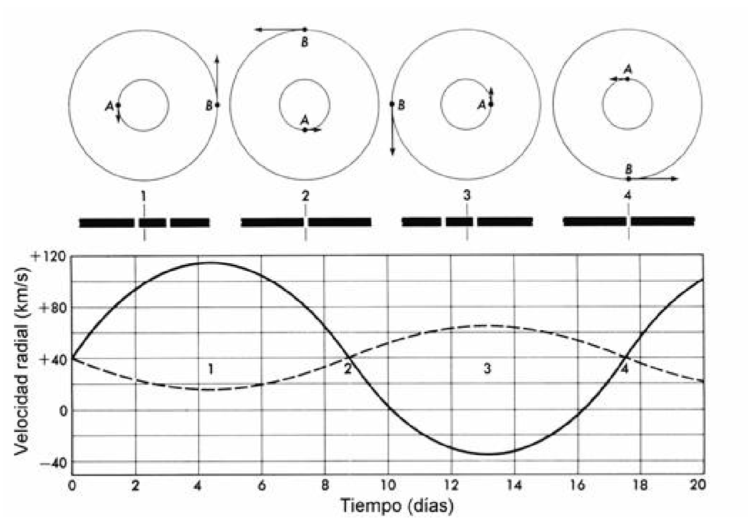

Figura 1: Estrellas binarias- ejercicio 1.7.

$$c_3 = c - v = c + 45\frac{km}{h}$$

y la distancia recorrida por la luz "3"

$$d = c_3 t = (c+v)t$$

Como la luz "3" sale con un tiempo $T = \pi r v$ de retraso, la distancia a la que la luz "3" daría caza a la luz "1" se encuentra igualando las expresiones anteriores:

$$(c-v)[t + \pi r v] = (c+v)t$$

$$t[(c-v)(c+v)] = -(c-v)\pi r v$$

$$t = \frac{(c-v)\pi r v}{2v} = \frac{\pi r}{2}(c-v) \rightarrow \boxed{d = \frac{\pi r}{2}(c^2 - v^2)}$$

A continuación, ejercicios que requieren conocimientos de física previos al curso (centro de masas, cantidad de movimiento, trigonometría, derivadas). Ver videos 01 y 02.

1.6. Un planeador acrobático desciende en línea recta a velocidad constante de $300\frac{km}{h}$ formando un ángulo de 45^o respecto a la horizontal. Calcular la velocidad con se que mueve su sombra.

La velocidad de la sombra del planeador es la componente horizontal de la velocidad del avión. Por ello:

$$V_{sombra} = V \times cos(\alpha) = 300cos(45^o) = \boxed{212\frac{km}{h}}$$

1.7. La ley de Hooke para un muelle, en el sistema S, se expresa según $m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -k(x - x_0)$. Teniendo en cuenta la relatividad de Galileo ($x' = x + vt$) demostrar que en el sistema S', con velocidad uniforme respecto al sistema S, esta ley se escribe $m\frac{d^2x'}{dt^2} = F' = -k(x' - x'_0)$.

La ley de Hooke dice que la fuerza de recuperación de un muelle es directamente proporcional al desplazamiento respecto a su posición de equilibrio:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -k(x - x_0)$$

Según las ecuaciones de transformación de Galileo:

$$x' = x + vt$$

$$t' = t$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + v$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x' - x'_0 = x + vt - x'_0 - vt$$

Con lo que $\boxed{m\frac{d^2x'}{dt^2} = F' = -k(x' - x'_0)}$

1.8 Uno de los secuaces de *Le Cifre* se dispone a atentar contra *James Bond*. Para ello ha elaborado un dispositivo como el de la figura, dentro del cual hay una pequeña cantidad de material explosivo capaz de liberar $200J$ de energía. Cuando lo haga explosionar, las tres piezas, idénticas, que lo componen ($m = 2kg$) saldrán despedidas en tres direcciones radiales diferentes. Si dicho agente maligno lanza el dispositivo contra Bond con una velocidad inicial de $v_0 = 4\frac{m}{s}$, determinar la velocidad final de cada partícula después de la explosión.

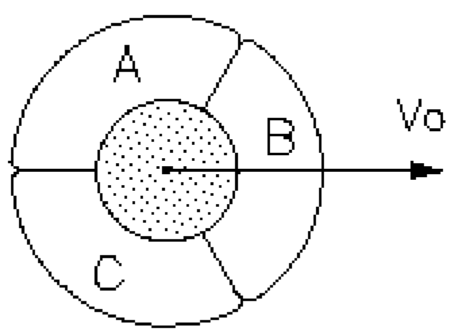

Figura 2: ejercicio 1.9.

Calcularemos primero las velocidades en el sistema del centro de masas, CM. En este sistema CM, antes de explotar, el dispositivo está en reposo. El centro de masas del dispositivo está en el origen de coordenadas de este sistema. Tras explotar, los tres pedazos se alejarán del centro, pero el centro de masas permanecerá en el origen. Después de calcular las velocidades en el sistema CM, transformaremos los resultados al sistema del laboratorio vía las transformaciones de Galileo.

$$0 = \vec{p_A} + \vec{p_B} + \vec{p_C} = \vec{v_A} + \vec{v_B} + \vec{v_C}$$

Debido a que las tres partículas son idénticas, en este sistema de referencia, sus trayectorias formarán 120° entre sí, de tal manera que:

$$\vec{v_B} = v_B\vec{i}$$

$$\vec{v_A} = v_A(-0'5\vec{i} + 0'87\vec{j}) \tag{1}$$

$$\vec{v_C} = v_C(-0'5\vec{i} - 0'87\vec{j})$$
$$v_A = v_B = v_C$$

Puesto que la energía liberada es de $200J$, cada partícula tendrá una energía cinética de:

$$E_A = E_B = E_C = \frac{1}{2}2v^2 \qquad \rightarrow \qquad v = 14'14\frac{m}{s}$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (1)

$$\vec{v_B} = 14'14\vec{i}$$
$$\vec{v_A} = v_A(-7'07\vec{i} + 12'25\vec{j})$$
$$\vec{v_C} = v_C(-7'07\vec{i} - 12'25\vec{j})$$

Estas son las velocidades vistas desde el sistema de referencia CM.